Die Kreisevolvente

Sandra Görlich

12. Januar 2017

Seminar - Ausgewählte höhere Kurven

von Hermann Schmidt

im Wintersemester 2016/17

Dozent: Prof. Dr. Duco van Straten

Fachbereich Mathematik
Johannes-Gutenberg Universität Mainz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**
1.1 Geschichtlicher Hintergrund . . . 3
1.2 Was ist eine Kreisevolvente? . . . 4

2 Die Evolute **5**
2.1 Definition . . . 5
2.2 Die Krümmung . . . 5
2.3 Der Krümmungskreis, Krümmungsadius, Krümmungsmittelpunkt . . . 6
2.3.1 Wichtige Formeln . . . 7
2.3.2 Evolute der Parabel . . . 10
2.3.3 Evolute der Zykloide . . . 11
2.3.4 Evolute der Ellipse . . . 12
2.4 Eigenschaften der Evolute . . . 13

3 Die Evolvente **16**
3.1 Definition . . . 16

4 Die Kreisevolvente **17**
4.1 Definition . . . 17
4.2 Parameterdarstellung . . . 18
4.3 Besonderheiten der Form . . . 18
4.3.1 Die Kreisevolvente in Verbindung mit der Epizykloide . . . 19
4.3.2 Kreisevolvente heute . . . 20
4.4 Quellenverzeichnis . . . 21

1 Einleitung

1.1 Geschichtlicher Hintergrund

Die *Kreisevolvente* wurde von dem niederländischen Astronom, Mathematiker und Physiker Christiaan Huygens näher betrachtet und untersucht.

Abbildung 1: Christiaan Huygens

Huygens ist am 14. April 1629 in Den Haag geboren und am 8. Juli 1695 wieder in Den Haag verstorben. Er war der Sohn des bekannten niederländischen Staatsmannes und Schriftstellers Constantijn Huygens und aufgrund der hohen Position seines Vaters kam Christiaan Huygens sehr früh mit großen Gelehrten und Künstlern seiner Zeit zusammen. Hierdurch ließ sich Huygens auch durch die Theorien von René Descartes inspirieren, welcher sich lange Zeit in den Niederlanden aufhielt. Im laufe der Jahre vertrat Huygens die Theorien von Descartes jedoch nicht.
Huygens begann zunächst Rechtswissenschaften an der Universität Leiden zu studieren, aber sein Interesse an der Mathematik stieg immer mehr, sodass er sich seinen akademischen Titel kaufte, was im 17. Jahrhundert nichts ungewöhnliches war. Die Mathematik zog ihn so in den Bann, dass er anfing durch Europa zu reisen und seine ersten mathematischen Werke und Schriften veröffentlichte.
1655 kehrte er in die Niederlande zurück und machte hier seine wichtigste Entdeckung. Er entwickelte eine äußerst präzise Pendeluhr, die schon unter anderem Galileo Galilei beschrieb und Huygens sie letzten Endes in die Praxis umsetzte.
1658 erhielt sogar der Dom von Utrecht eine Uhr, die auf dem Prinzip von Huygens beruht.

Der Wissenschaft brachte diese Entwicklung einen enormen Vorteil, denn durch die präzisen Uhren konnten Messungen viel genauer durchgeführt werden und Huygens wurde in ganz Europa zu einen berühmten Wissenschaftler.
Durch seine Studien über die Pendeluhr hatte Huygens auch die *Evolute* einer Kurve entdeckt und somit die *Kreisevolvente*.

1.2 Was ist eine Kreisevolvente?

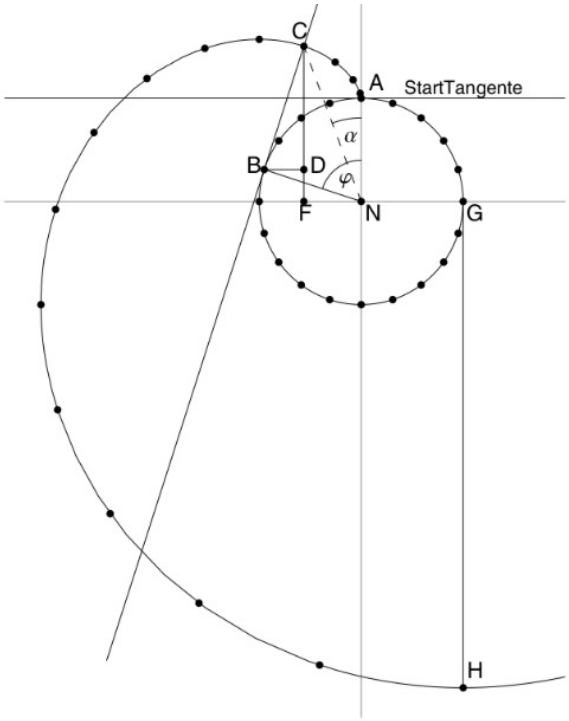

Abbildung 2: Die Kreisevolvente

Damit wir uns unter dem Begriff *Kreisevolvente* etwas vorstellen können betrachten wir zunächst den Einheitskreis. Im obersten Kreispunkt A ziehen wir eine Tangente, unsere Starttangente. Lassen wir diese Tangente nun nach rechts (oder links) abrollen, so beschreibt der Ausgangspunkt A, als Tangentenpunkt aufgefasst, eine Kurve, die so genannte *Kreisevolvente*. Der Kreis ist ihre dazugehörige *Evolute*.

Zur besseren Veranschaulichung können wir uns einen gestrafften Faden vorstellen, der vom Umfang eines Kreises abgewickelt wird. Die entstandene Bahn des Fadens ergibt die *Kreisevolvente*.

Im Folgenden gehen wir zunächst näher auf die Begriffe *Evolute* und *Evolvente* ein und erläutern diese an einigen Beispielen.

2 Die Evolute

Der Begriff leitet sich vom lateinischen „evolvere“ im Partizip Perfekt ab und bedeutet „Abgewickelte“.

2.1 Definition

Der geometische Ort M' aller Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Kurve M heißt Evolute der Kurve M.

Um diese Definition besser zu verstehen, wollen wir uns einen kurzen Überblick über $Krümmungen$, insbesondere auch $Krümmungskreis, -radius, -mittelpunkt$ schaffen.

2.2 Die Krümmung

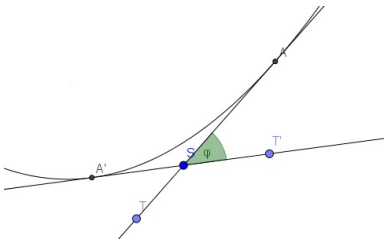

Abbildung 3: Krümmung einer Kurve

Wir betrachten eine beliebige Kurve M mit einem beliebigen Punkt A. Beim Übergang vom Punkt A zum Punkt A' geht die Tangente AT über in die Lage $A'T'$ und führt dabei eine Drehung um den Winkel φ aus. Das Verhältnis des Winkels φ zur Länge des Bogens $\overset{\smile}{AA'}$, also $\frac{\varphi}{\overset{\smile}{AA'}}$, charakterisiert die Krümmung der Kurve M längs des Teilstücks $\overset{\smile}{AA'}$.
Das bezeichnet man als mittlere Krümmung des Bogens AA'. Die Krümmung der Kurve M im Punkt A bezeichnet man als Grenzwert gegen den die mittlere Krümmung des Bogens AA' bei Annäherung von A' an A strebt.

$$K = \lim_{\overset{\smile}{AA'} \to 0} \frac{\varphi}{\overset{\smile}{AA'}}$$

Die Krümmung beschreibt die Abweichung der Kurve M von der Geradlinigkeit in dem betrachteten Punkt A. Die Krümmung einer Geraden ist in jedem Punkt gleich Null, die Krümmung eines Kreises mit Radius R ist überall gleich $\frac{1}{R}$, da die Krümmung immer gleich bleibt. Bei allen anderen Kurven ändert sich die Krümmung Punkt für Punkt.

2.3 Der Krümmungskreis, Krümmungsadius, Krümmungsmittelpunkt

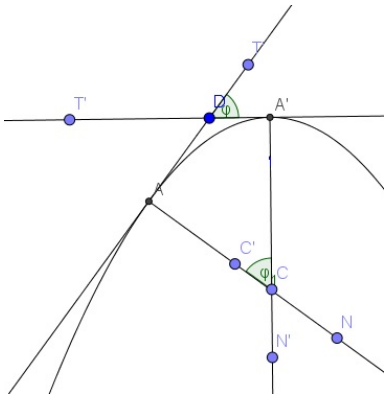

Abbildung 4: Krümmungsradius

Der Punkt A' bewegt sich entlang der Kurve M in Richtung des ruhenden Punktes A (Krümmung K in A $\neq 0$).
Der Punkt C (da, wo die ruhende Normale AN die Normale $A'N'$ schneidet) strebt dann gegen einen Punkt C', welcher vom Punkt A den Abstand $\frac{1}{K}{}^{*} = AC'$ hat. $\breve{AC'}$ ist hierbei zur konkaven Seite von M gerichtet.

* Betrachte das Dreieck ACA'. Der Winkel bei C ist gleich dem Winkel φ (da, die Schenkel der Winkel senkrecht aufeinander stehen),
$\sphericalangle CA'A = 90° - \varphi$, wo $\lambda = \sphericalangle AA'D$ ∞-klein ist (kleiner als φ).
Sinussatz $\Rightarrow AC = \frac{\sin(90°-\lambda)}{\sin(\varphi)} AA' = \cos(\lambda)\frac{AA'}{sin(\varphi)}$. Es ist $AA' = \breve{AA'}$.

So ist $\sin(\varphi) = \varphi$ und $\cos(\lambda) \to 1$.
Wir wenden den Grenzwert an und erhalten:
$AC' = \lim \frac{\breve{AA'}}{\varphi} = 1/(\lim \frac{\varphi}{AA'}) = \frac{1}{K}$

- Strecke $\overline{AC'}$ heißt Krümmungsradius R
- Punkt C ist Krümmungsmittelpunkt der Kurve M
- Krümmung und Radius sind invers zueinander
  $K = \frac{1}{R}$ und $R = \frac{1}{K}$

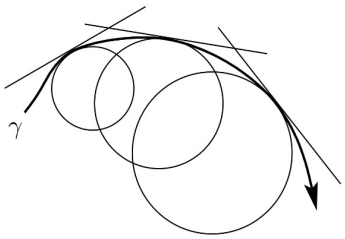

Abbildung 5: Veranschaulichung Krümmungskreise

2.3.1 Wichtige Formeln

- Krümmung einer Kurve $y = f(x)$

$$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

Wie schon zuvor beschrieben, beschreibt die Krümmung die Geschwindigkeit , mit der sich der Winkel φ der Kurve verändert. Somit erhalten wir, mit Hilfe der Ketternregel, für die Krümmung K:

$$K = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} * \frac{dx}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} : \frac{ds}{dx}$$

Für die Bogenlänge S gilt:

$$\int \sqrt{1+y'^2}dx \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+y'^2}$$

$\tan(\varphi) = y'$ beschreibt den Winkel zwischen der Tangente und der x-Achse und daraus können wir folgern, dass $\varphi = \arctan(y')$ ist.
Mit Hilfe der Kettenregel erhalten wir: $\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+y'^2}y''$ und so erhalten wir für die Krümmung:

$$K = \frac{1}{1+y'^2}y'' * \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{y''}{(1+y'2)^{\frac{3}{2}}}$$

- Krümmungsradius

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} \tag{2}$$

Da Krümmung und Radius invers zueinander sind, folgt die Formel direkt aus der Formel der Krümmung.

- Koordinaten des Krümmunsmittelpunkts

$$x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''} \tag{3}$$

$$y_c = y + \frac{1+y'^2}{y''} \tag{4}$$

Zur Bestimmung dieser Formel benötigen wir folgende trigonometrische Funktionen:

$$\sin(\varphi) = \frac{\tan(\varphi)}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\varphi)}}$$

Gegeben sei uns weiterhin die Funktion in Form von $y = f(x)$ mit ihren Ableitungen y' und y'' und dem Steigungswinkel φ.
Da $y' = \tan(\varphi)$ gilt, gilt insbesondere auch:

$$\sin(\varphi) = \frac{y'}{\sqrt{1+y'2}}$$

und

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1+y'2}}$$

Es gilt:

$$x_c = x - R\sin(\varphi)$$

$$y_c = y + R\cos(\varphi)$$

Wir setzten nun $\sin(\varphi)$, $\cos(\varphi)$ und R, wobei R der Krümmungsradius ist, in die Gleichung ein.

$$x_c = x - \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

$$\Rightarrow x_c = x - \frac{y'(1+y'^2)}{y''}$$

und analog für y_c.

- Krümmungsmittelpunkte für eine Kurve in Parameterform

$$x_c = x - \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}y' \tag{5}$$

$$y_c = y + \frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}x' \tag{6}$$

Wir können die Krümmungsmittelpunkte auch in Abhängigkeit von der Bogenlänge S darstellen. Die Bogenlänge S ist gegeben durch: $\int \sqrt{x'^2+y'^2}dt$

$\Rightarrow (\frac{dS}{dt})^2 = x'^2 + y'^2 = 1$
Hierdurch erhalten wir für die Evolute in Abhängigkeit vom Parameter S:

$$x_c = x - Ry'$$
$$y_c = y + Rx'$$

Nun können wir uns etwas unter der Definition der *Evolute* vorstellen und halten das an einigen Beispielen zur genaueren Veranschaulichung fest.

2.3.2 Evolute der Parabel

Wir bestimmen die Evolute der Parabel.

$$y = x^2$$
$$y' = 2x$$
$$y'' = 2$$

Als Parameter betrachten wir die Abzisse x. Durch einsetzten in die (3)-te und (4)-te Formel erhalten wir:

$$x_c = x - \frac{2x(1+4x^2)}{2} = \frac{-8x^3}{2} = -4x^3$$
$$y_c = x^2 + \frac{1+4x^2}{2} = \frac{1+6x^2}{2} = \frac{1}{2} + 3x^2$$

Wir setzten x=t und erhalten die Parameterform:

$$x = -4t^3$$
$$y = 3t^2 + \frac{1}{2}$$

Es gilt: $x^2 = 16t^6$ und $3t^2 = y - \frac{1}{2}$ oder $27t^6 = (y - \frac{1}{2})^3$
Durch umstellen und einsetzen erhalten wir:
$\Rightarrow t^6 = \frac{x^2}{16} = \frac{1}{16}x^2$
$t^6 = \frac{(y-\frac{1}{2})^3}{27} = \frac{1}{27}(y - \frac{1}{2})^3$
Koordinatengleichung: $\frac{27}{16}x^2 = (y - \frac{1}{2})^3$

Die Evolute ist eine Semikubische Parabel.

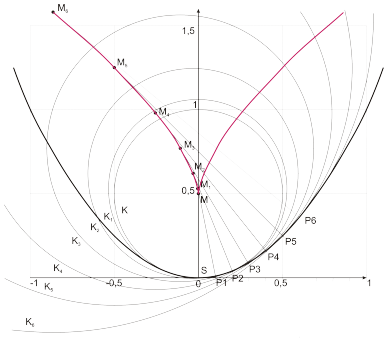

Abbildung 6: Evolute der Parabel

In der Abbildung 6 sehen wir die Parabel, die schwarz eingezeichnet ist mit ihrer dazugehörigen Evolute in rot. $K, K_1, K_2, ...$ stellen die Krümmungskreise im jeweiligen Punkt $S, P_1, P_2, ...$ mit ihrem Mittelpunkt $M, M_1, M_2, ...$ dar.

2.3.3 Evolute der Zykloide

Wir bestimmen die Evolute der Zykloide.

$$x = t - \sin(t)$$

$$x' = 1 - \cos(t)$$

$$x'' = \sin(t)$$

$$y = 1 - \cos(t)$$

$$y' = \sin(t)$$

$$y'' = cos(t)$$

Nach der (5)-ten und (6)-ten Formel erhalten wir:

$$x_c = t - \sin(t) - \frac{(1-\cos(t))^2 + \sin(t))^2}{(1-\cos(t))\cos(t) - \sin(t)\sin(t)}\sin(t) = t + \sin(t)$$

$$y_c = (1-\cos(t)) + \frac{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}{(1-\cos(t))\cos(t) - \sin(t)\sin(t)}(1-\cos(t)) = -1 + \cos(t)$$

Die entstandene Evolutengleichung ist der, der Zykloide sehr ähnlich.
Sein nun $t = \tau + \pi$, so lässt sich leicht erkennen, dass es sich wieder um eine Zykloide handelt.

$$x_c = t + \sin(t) = (\tau + \pi) + \sin(\tau + \pi) = \tau + \pi - \sin(\tau) \Rightarrow x_c - \pi = \tau - sin(\tau)$$

$$y_c = -1 + \cos(t) = -1 + \cos(\tau + \pi) = -1 - \cos(\tau) \Rightarrow y_c + 2 = 1 - \cos(\tau)$$

Somit ist die Evolute der Zykloide wieder eine Zykloide, die um π in x-Richtung und um -2 in y-Richtung verschoben ist.

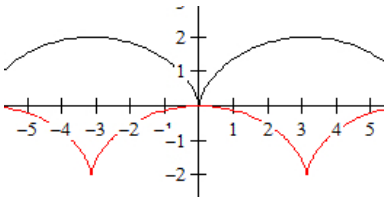

Abbildung 7: Evolute der Zykloide

In Abbildung 7 sehen wir in *schwarz* die Zykloide und in *rot* ihre dazugehörige Evolute, die wiederum, wie oben beschrieben, eine Zykloide darstellt.

2.3.4 Evolute der Ellipse

Wir bestimmen die Evolute der Ellipse.

$$x = a\cos(t)$$

$$x' = -a\sin(t)$$
$$x'' = -a\cos(t)$$

$$y = b\sin(t)$$
$$y' = b\cos(t)$$
$$y'' = -b\sin(t)$$

Nach der (5)-ten und (6)-ten Formel erhalten wir:

$$x_c = a\cos(t) - b\cos(t)\frac{((-a\sin(t))^2 + b\cos(t))^2}{(-a\sin(t))(-b\sin(t)) - (b\cos(t))(-a\cos(t))} = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3(t)$$

$$y_c = b\sin(t) - a\sin(t)\frac{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}{ab\sin^2(t) + ab\cos^2(t)} = -\frac{a^2 - b^2}{b}\sin^3(t)$$

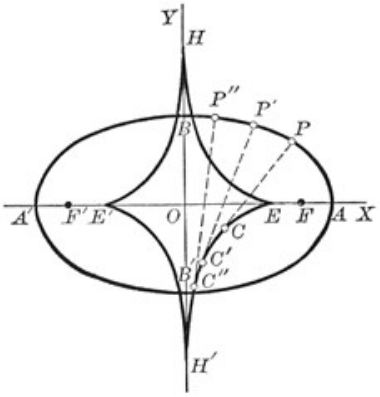

Abbildung 8: Evolute der Ellipse

Die entstandene Evoultengleichung charakterisiert die Parameterdarstellung einer schiefen Astroide.

2.4 Eigenschaften der Evolute

(1) Die Tangente der Evoluten M' stimmt mit der Normalen der Kurve M überein.

Die Normale der Kurve M berührt die Evolute im entsprechenden Krümmungsmittelpunkt.
Hierzu können wir Hüllkurven näher betrachten. Hüllkurven beschreiben eine Kurve bzw. umhüllen Kurven anhand von Geraden.

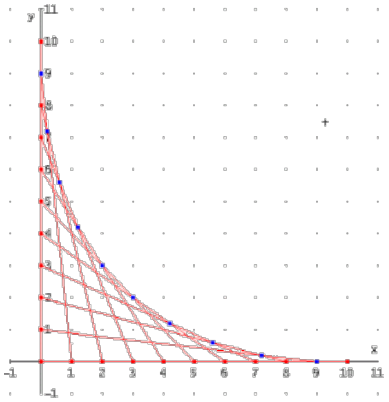

Abbildung 9: Beispiel Hüllkurve

– Beispiel

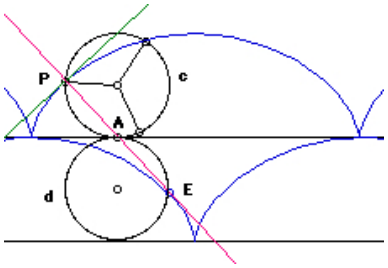

Abbildung 10: Normale der Zykloide

Im der Abbildung 10 erkennen wir im Punkt P der Zykloide die dazugehörige Tangente in *grün* und ihre Normale in *rot*, die wiederum die Tangente der Evolute der Zykloide im Punkt E darstellt. Wir können somit erkennen, dass die Normale PE der Zykloide, die Evoluter der Zykloide im Krümmungsmittelpunkt E berührt.

Beweis:

$$x'^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow 2x'x'' + 2y'y'' = 0 \Rightarrow x'x'' + y'y'' = 0$$

$$K = \frac{1}{R} = \frac{x'y'' - y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = x'y'' - y'x'' = y''(x' - y'\frac{x''}{y''}) = y''(x' + y'\frac{y'}{x'})$$

$$= y''(x' + \frac{1 - x'^2}{x'}) = y''(x' + \frac{1}{x'} - x') = \frac{y''}{x'} = -\frac{x''}{y'}$$

$\Rightarrow Ry'' = x'$, sowie $Rx'' = -y'$,
wobei wir hierfür $x'^2 + y'^2 = 1 \Rightarrow y'^2 = 1 - x'^2$ und $x'x'' + y'y'' = 0$
$\Rightarrow x'x'' = -y'y'' \Rightarrow \frac{x''}{y''} = -\frac{y'}{x'} \Rightarrow \frac{x''}{y'} = -\frac{y''}{x'}$ benutzt haben.
Somit folgt für $x_c = x - Ry'$ und $y_c = y + Rx'$:

$$x_c = x' - Ry'' - R'y' = -R'y'y'_c = y' + Rx'' + R'x' = R'x'$$

Wir erhalten somit: $-R'y'x' + R'x'y' = 0 \Rightarrow x'_c x' + y'_c y' = 0$
Die Gleichung erfüllt $x'_c = -y'$ und $y'_c = x'$. Hieraus folgt sofort die (1) Eigenschaft, die zu zeigen war. q.e.d.

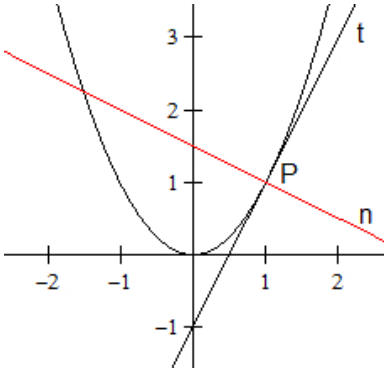

Abbildung 11: Veranschaulichung: Normale der Tangente ist wieder eine Tangente

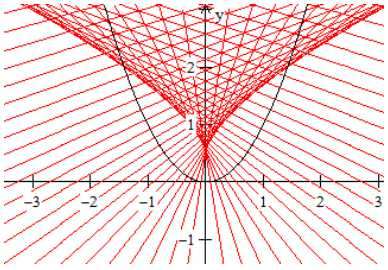

Abbildung 12: Tangenten der Evolute einer Parabel

(2) Der Krümmungsradius R zweier Punkte einer Kurve unterscheidet sich im gleichen Maß, wie die Länge des Evoultenbogens bzw. der Bogenlänge $\sigma_0 \breve{\sigma}_1$ zwischen den dazugehörigen Krümmungsmittelpunkten, also:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = R_{\sigma_0} - R_{\sigma_1}$$

Beweis:
Sei σ die Bogenlänge der Evolute in einem beliebigen Punkt und $R' \neq 0$.
Dann gilt:

$$(\frac{d\sigma}{ds}) = \sigma'^2 = x_c'^2 + y_c'^2 = (-R'y')^2 + (R'x')^2 = R'^2(y'^2 + y'^2) = R'^2$$

Somit gilt:

$$\sigma'^2 = R'^2 \Rightarrow \sigma' = R' \Rightarrow \sigma 1 - \sigma_0 = R_1 - R_0$$

Den letzten Schritt erhalten wir mit Hilfe der Integration. q.e.d.

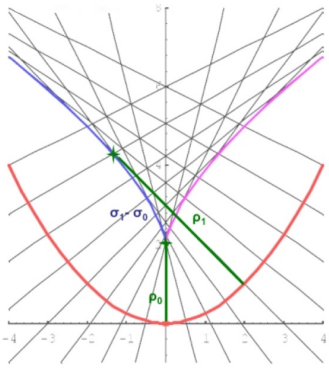

Abbildung 13: Bogenlänge in Relation zu dem Krümmungsradien

$R' \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung. Würden wir diese nicht Beachten, so würde sich beim Überschreiten dieses Punktes das Vorzeichen von R' ändern und somit würde sich die Bogenlänge nicht normal weiter zählen. Um dies zu umgehen, können wir beim Übergang an diesem Punkt einfach das Vorzeichen des Krümmungsradius ändern und damit weiterrechnen, also $\sigma'^2 = -R'^2$.

3 Die Evolvente

Der Begriff leitet sich vom lateinischen „evolvere“ im Partizip Präsens ab und bedeutet „Abwickelnde“.

3.1 Definition

Wickeln wir von der Evolute (hier die semikubische Parabel) die Evolutentangente ab, so beschreibt ein Punkt dieser Tangente die gegebene Kurve (hier die Parabel)oder eine zu ihr parallele, d.h. im gleichen Normalabstand laufende(siehe Abbildung 14).
Die Schar von parallelen Kurven heißt die zu der gegebenen Evolute gehörige Schar von Evolventen.
Auf der semikubischen Parabel wählen wir eine Richtung wachsender Bogenlängen (z.B. Richtung P_1 nach P_5). In dieser Richtung tragen wir auf den langen Stecken P_1E_1, P_2E_2, P_3E_3,.. ab, deren Länge um den Zuwachs der Bogenlänge zunimmt. (siehe: Eigenschaften der Evolute (2)).
Der geometrische Ort der Enden dieser Strecke nennen wir Evolvente der gegebenen Kurve.
Die Evolvente einer Kurve sind die Orthogonaltrajektorien ihrer Tangente, d.h. sie schneiden alle Tangenten unter einem rechten Winkel.

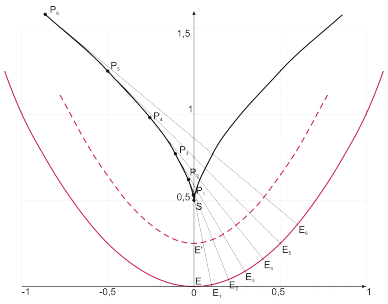

Abbildung 14: Evolventen Konstruktion

Die Begriffe *Evolute* und *Evolvente* gehen auch auf Christiaan Huygens zurück, die er in seinem Hauptwerk „Horologium oscillatorium“ niederschrieb. Die Evolute bezeichnete er genauso, wie wir es heute noch tun, wobei er aber die Evolvente als „Descripta ex evolutione“, also „durch Abwicklung beschriebene Kurve“, nannte.

4 Die Kreisevolvente

Die wohl bekannteste Kreisevolvente finden wir im Leichtathletikstadion. Wenn wir einen Blick auf die Laufbahn nehmen, dann sorgt die Evolvente, unanhängig davon, auf welcher Bahn wir laufen, dafür, dass jeder Läufer die gleiche Strecke zurücklegt.

4.1 Definition

Anstatt, dass wir, wie bei der Zykloide, einen festen Kreis auf einer Geraden (ohne zu gleiten) abrollen, rollen wir jetzt eine Gerade von einem festen Kreis ab. Ein makierter Punkt C auf der Geraden beschreibt dabei die Kurve. Hierdurch entsteht die Kreisevolvente.

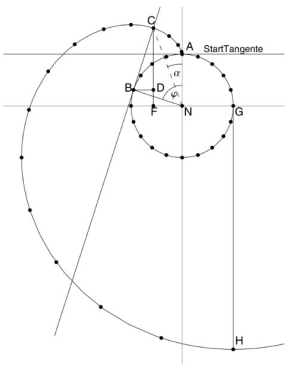

Abbildung 15: Die Kreisevolvente

Der Punkt B durchläuft ausgehend von seiner Anfangslage A mehrmals den Kreis mit Radius r. Auf der *StartTangente* tragen wir gegen die Drehrichtung die Strecke BC auf ($\overline{BC} = \overline{AB}$).
Durchläuft der Punkt B den Kreis im Uhrzeigersinn, so sprechen wir von einer Rechtsevolvente. Durchläuft er den Kreis gegen den Uhrzeigersinn, so sprechen wir von einer Linksevolvente (siehe Abbildung 15).

4.2 Parameterdarstellung

Wir betrachten das Dreieck $\triangle BCD$. Damit wir die x-Koordinate $x(\varphi)$ des Evolutenpunktes C erhalten, betrachten wir die x-Koordinate des Punktes B und addieren die Strecke $\overline{BD}$ hinzu, wobei die Strecke $\overline{BD}$ die Länge $\varphi\cos(\varphi)$ hat. Der Winkel $\sphericalangle CBD$ ist gleich φ und die Strecke $\overline{BC}$ beträgt φ.
Analog verfahren wir für die y-Koordinate $y(\varphi)$ des Evolutenpunktes C.
Somit lautet die Parameterdarstellung der Kreisevolvente:

$$x(\varphi) = \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) + \varphi\cos(\varphi) = \varphi\cos(\varphi) - \sin(\varphi) \tag{7}$$

$$y(\varphi) = \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) + \varphi\sin(\varphi) = \cos(\varphi) + \varphi\sin(\varphi) \tag{8}$$

4.3 Besonderheiten der Form

(1) Alle Tangenten eines Kreises werden durch die Kreisevolvente unter einem rechten Winkel geschnitten. Im Anfangspunkt A bildet die Kreisevolvente bei einer Drehung von 2π einen rechten Winkel mit der $StartTangente$.

(2) Auf der anderen Seite dient die Normale der Evolvente gleichzeitig als Tangente für den Kreis (siehe Tangente bei $\overline{BC}$). Hierbei bildet der Berührungspunkt B den Krümmungsmittelpunkt für die Evolvente. Somit charakterisiert $\overline{CB}$ den Krümmungsradius R der Evolvente: $R = \overline{CB}$.
Insbesondere beträgt der Krümmungsradius im Anfangspunkt A Null : $R_0 = 0$.
Der geometrische Ort aller Krümmunngsmittelpunkte der Kreisevolvente ist somit wieder der Kreis selbst, der somit die Evolvente bildet.

(3) Mit wachsender Entfernung der Punktes B zum Ausgangspunkt A wächst auch der Krümmungsradius R. Der Zuwachs $R_G - R_B = GH - BC$ ist gleich der Länge des entsprechenden Bogens $\breve{BG}$ des Kreises: $R_G - R_B = \breve{BG}$.

(4) Die Kreisevolvente dringt nicht in das Kreisinnere ein. Hier stellt der Anfangspunkt A einen Umkehrpunkt der Evolvente dar. Bei Durchgang des Punktes B durch den Anfangspunkt A dreht sich die Bewegungsrichtung somit um.

4.3.1 Die Kreisevolvente in Verbindung mit der Epizykloide

Betrachten wir nun eine gewöhnliche Epizykloide (wo Radius $r = c$, also unser Punkt P liegt auf dem Umfang des rollenden Kreises).
Was passiert, wenn der Umfang des rollenden Kreises unendlich wird?
$\Rightarrow$ Wir erhalten eine Kreisevolvente.

Bei mathematischer Betrachtung können wir folgendes Festhalten:
Die Parameterdarstellung der Epizykloide mittels dem Drehwinkel φ ist uns bereit bekannt:

$$x = (R + r)\cos\varphi - c\cos((\frac{R+r}{r})\varphi)$$
$$y = (R + r)\sin\varphi - c\sin((\frac{R+r}{r})\varphi)$$

R ist der Radius des festen Kreises und r der Radius des rollenden Kreises.

Setzten wir $c = r$ und $\frac{1}{r} = \epsilon$, so folgt:

$$x = (R + \frac{1}{\epsilon})\cos\varphi - \frac{1}{\epsilon}\cos((\frac{R+\frac{1}{\epsilon}}{\frac{1}{\epsilon}})\varphi) = R\cos\varphi + \frac{1}{\epsilon}\cos\varphi - \frac{1}{\epsilon}\cos((R\epsilon+1)\varphi)$$

$$= R\cos\varphi + \frac{\cos\varphi - \cos((R\epsilon+1)\varphi}{\epsilon}$$

Analog für y:

$$= R\sin\varphi + \frac{\sin\varphi - \sin((R\epsilon+1)\varphi}{\epsilon}$$

Für $r \to \infty$, also $\epsilon \to 0$, finden wir nach der $Bernoulli - L'HospitalschenRegel$:
Untersuchen wir zunächst den Term: $\cos\varphi - \cos((R\epsilon+1)\varphi)$ und leiten diesen nach ϵ ab

$$\frac{d}{d\epsilon}[\cos\varphi] - \frac{d}{d\epsilon}[\cos(\varphi(R\epsilon+1))]$$
$$= 0 - (-\sin(\varphi(R\epsilon+1))) \cdot \frac{d}{d\epsilon}[\varphi(R\epsilon+1)]$$
$$= \varphi(R \cdot \frac{d}{d\epsilon}[\epsilon] + \frac{d}{d\epsilon}[1]) \cdot \sin(\varphi(R\epsilon+1))$$
$$= \varphi(1 \cdot R + 0)\sin(\varphi(R\epsilon+1))$$
$$= \varphi R\sin(\varphi(R\epsilon+1))$$

Wenn wir nun die ganze Gleichung betrachten, erhalten wir:

$$\lim_{\epsilon\to 0} R\cos\varphi + \frac{\cos\varphi - \cos(\varphi(R\epsilon+1))}{\epsilon}$$
$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} R\cos\varphi + \frac{\varphi \cdot R\sin(\varphi(R\epsilon+1))}{1}$$
$$= R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi$$
$$= R(\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$

Analog gehen wir für den y-Wert vor:

$$\lim_{\epsilon \to 0} R \sin \varphi + \frac{\sin \varphi - \sin(\varphi(R\epsilon + 1))}{\epsilon}$$
$$\overset{\text{L'Hospital}}{=} R(\sin \varphi - \varphi \cos \varphi)$$

Wir haben die Parameterdarstellung der Kreisevolvente erhalten. Somit ist die Behauptung gezeigt.

4.3.2 Kreisevolvente heute

Huygens gelang damals die genaue Regulierung des Uhrengangs mit Hilfe des Zykloidenpendels, jedoch ist der Anwedungsbereich der Zykloidenverzahnung im Vergleich zur Evolventenverzahnung sehr beschränkt. Für z.B. Zahnradprofile wird heutzutage fast nur noch die Evolventenverzahnung gewählt, da sie alle Anforderungen, die an die Verzahnung gestellt werden, erfüllt und zudem hat sie die schon bereits genannten Eigenschaften.

4.4 Quellenverzeichnis

Als Hauptquelle und Grundlage dieses Seminars stand uns das Buch „Ausgewählte höhere Kurven“von Hermann Schmidt zur Verfügung, welches ich auch zur meiner Hauptrecherche und Orientierung benutzte. Im Vordergrund stand hier die „Siebente Gruppe“mit dem ersten Unterkapitel „Die Kreisevolvente“. Ein weiteres wichtiges Werk, welches mir zur Verfügung stand ist das
„Horologium oscillatorium: die Pendeluhr“- Oswald's Klassiker der Exakten Wissenschaften. Hierdurch erlangte ich weitere wichtige Einblicke in die Geschichte und Entdeckung der Evoluten und Evolventen.
Als weitere Lektüre benutzte ich:
Die Entwicklung der Zahnradtechnik:Zahnformen und Tragfähigkeitsberechnung
von H.-Chr.Graf v. Seherr-Thoss
Höhere Mathematik von Vygodskih, Mark Ja.
Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker, Ingenieure von Rothe, Rudolf Ernst
Mathematische Formeln und Tafeln von Szabó, István

Bei meiner Internetrecherche stieß ich auf weitere hilfreiche Webseiten:
$http://mathcurve.com/courbes2d/enveloppe/enveloppe.shtml$
$https://de.wikipedia.org/wiki/Christiaan_Huygens$
$https://de.wikipedia.org/wiki/Evolute$
$http://www.mathematische-basteleien.de/evolute.htm$
$http://mathworld.wolfram.com/Evolute.html$
$https://de.wikipedia.org/wiki/Evolvente$
$https://de.wikipedia.org/wiki/Kreisevolvente$
$http://www.weihermueller.de/evolvente/evolvente1.htm$
$http://haftendorn.uni-lueneburg.de/analysis/kruemm-huell/evolute.pdf$
$https://www.yumpu.com/de/document/view/17878801/kurvenskript-mathematik/45$